Funções

Generalidades sobre funções

Chama-se **função f** de **domínio A** (representa-se por D_f) e conjunto de chegada B a toda a correspondência **unívoca** que a cada elemento de A faz corresponder um e um só elemento de B.

Os elementos do domínio chamam-se **objetos** e a cada objeto corresponde uma **imagem**.

Simbolicamente:

$$f: A \rightarrow B$$
$$x \longrightarrow \ y = f(x)$$

Ao conjunto de imagens de f chama-se **contradomínio** da função e representa-se por D'_f.

O grafico de f é o conjunto de pares ordenados: $\{(x, f(x)), x \in A\}$.

Na relação $y = f(x)$, x é a **variável independente** e y é a **variável dependente**.

Chama-se função real de variável reala uma função em que tanto o domínio como o contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Uma função pode ser definida através de:

- um diagrama;
- uma tabela de valores;
- uma expressão analítica;
- um gráfico.

Zeros de uma função

Dada uma função f de domínio D, os **zeros** de f são os elementos de D que têm imagem nula. Isto é, $x_0 \in D'_f$ é um zero de f se $f(x_0) = 0$.

Função injetiva

Uma função f de domínio D diz-se **injetiva** se e só se $\forall x_1, x_2 \in D$, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Sinal de uma função

Dada uma função f de domínio D e I um subconjunto de D ($I \subset D$), diz-se que:

- f é positiva em I se e só se $f(x) > 0, \forall x \in I$;
- f é negativa em I se e só se $f(x) < 0, \forall x \in I$.

Monotonia de uma função

Uma função f é **estritamente crescente** em $I \subset D_f$ se e só se $\forall x_1, x_2 \in I$, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.

Uma função f é **estritamente decrescente** em $I \subset D_f$ se e só se $\forall x_1, x_2 \in I$, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.

Uma função f é **crescente em sentido lato** em $I \subset D_f$ se e só se $\forall x_1, x_2 \in I$, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Uma função f é **decrescente em sentido lato** em $I \subset D_f$ se e só se $\forall x_1, x_2 \in I$, se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Uma função f é **constante** em $I \subset D_f$ se e só se $\forall x_1, x_2 \in I$, $f(x_1) = f(x_2)$.

Uma função f diz-se **monótona** num intervalo $I \subset D_f$ se é crescente ou decrescente (sentido estrito ou em sentido lato) nesse intervalo.

Extremos absolutos de uma função

Dada uma função f e $a \in D_f$, diz-se que:

- f tem um **máximo absoluto** em a se $\forall x \in D_f, f(x) \leq f(a)$. A a chama-se **maximizante** e a $f(a)$ **máximo absoluto**.

- f tem um **mínimo absoluto** em a se $\forall x \in D_f, f(x) \geq f(a)$. A a chama-se **minimizante** e a $f(a)$ **mínimo absoluto**.

Extremos relativos de uma função

- f tem um **máximo relativo** em a se existir uma vizinhança V de centro a tal que $\forall x \in V \cap D_f, f(x) \leq f(a)$. A a chama-se **maximizante** e a $f(a)$ **máximo relativo**.

- f tem um **mínimo relativo** em a se existir uma vizinhança V de centro a tal que $\forall x \in V \cap D_f, f(x) \geq f(a)$. A a chama-se **minimizante** e a $f(a)$ **mínimo relativo**.

Conceito intuitivo de continuidade de uma função

De uma forma intuitiva, uma função f diz-se contínua num intervalo do seu domínio quando o seu gráfico, nesse intervalo, por ser percorrido com um lápis sem que este tenha de ser “levantado”.

Quando uma função é contínua em qualquer intervalo contido no seu domínio, diz-se contínua em todo o seu domínio.

Os pontos do domínio de uma função onde está não é contínua dizem-se **pontos de descontinuidade** da função.

Funções definidas por ramos

Uma função diz-se definida por ramos se é definida por expressões diferentes em partes diferentes do seu domínio.

Tendências

Uma função f atribui uma variável dependente $f(x)$ a cada variável independente x. Diz-se que f tende para h numa variável independente x_a se $f(x)$ se aproxima de h à medida que x se aproxima de x_a. Simbolicamente:

$$x \to x_a, f(x) \to h$$

Função par

Uma função f de domínio D diz-se par se e só se

$$\forall x \in D, f(-x) = f(x)$$

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo Oy.

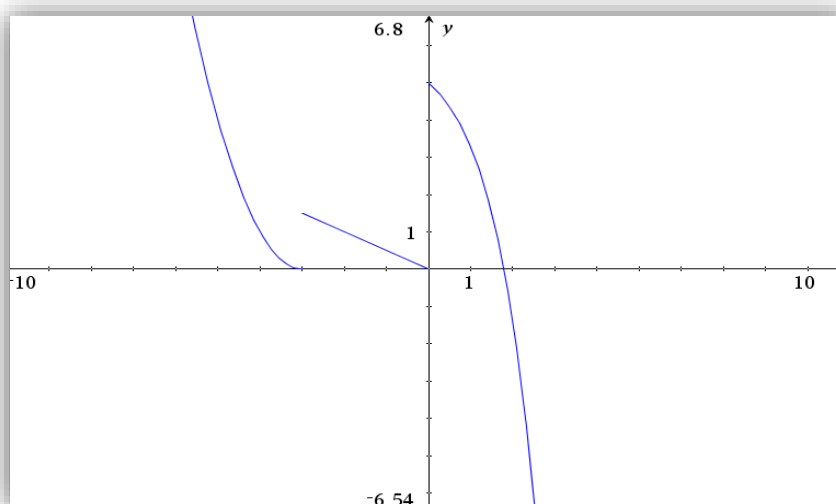
Função ímpar

Uma função f de domínio D diz-se ímpar se e só se

$$\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$$

O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do referencial.

Estudo completo de uma função

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2, se\ x < -3 \\ -\frac{x}{2}, se -3 \leq x \leq 0 \\ -e^x + 6, se\ x > 0 \end{cases}$. A função f é definida por 3 expressões diferentes no seu domínio e pode ser representada graficamente:

$D_f =]-\infty, -3[\cup [-3, 0] \cup]0, +\infty[= \mathbb{R}$

$D'_f =]-\infty, 6[\cup \left[0, \frac{3}{2}\right] \cup]0, +\infty[= \mathbb{R}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{0, 1.79\}$

A função é não injetiva: $-4 \neq -2 \wedge f(-4) = f(-2)$

Monotonia

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	$\frac{3}{2}$	↘	0	↘	

Sinal

x	$-\infty$		0		1.79		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

Máximo absoluto: Não tem

Máximo relativo: $\frac{3}{2}$

Maximizante: -3

Mínimo absoluto: Não tem

Mínimo relativo: 0

Minimizante: 0

A função f não é contínua no seu domínio, sendo pontos de descontinuidade os pontos cujas abcissas são -3 e 0.

Não é uma função par nem uma função ímpar.

Tendências

$$x \to -\infty, f(x) \to +\infty$$
$$x \to -3^-, f(x) \to 0$$
$$x \to -3^+, f(x) \to \frac{3}{2}$$
$$x \to 0^-, f(x) \to 0$$
$$x \to 0^+, f(x) \to 5$$
$$x \to +\infty, f(x) \to -\infty$$

Função afim

Definição

Chama-se **função afim** às funções de domínio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = mx + b; b, m \in \mathbb{R}$.

Se $m = 0$, então $f(x) = b$ e diz-se que f é uma **função constante**.

Se $b = 0$, então $f(x) = mx$ e diz-se que f é uma **função linear**.

Propriedades da função afim

$f(x) = mx + b$	$m < 0$	$m = 0$	$m > 0$
Domínio	$\mathbb{R}$		
Contradomínio	$\mathbb{R}$	b	$\mathbb{R}$
Zeros	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{m}$	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$ se $b \neq 0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ se $b = 0$	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{m}$
Monotonia	Estritamente decrescente	Constante	Estritamente crescente
Sinal	Positiva em $\left]-\infty, -\frac{b}{m}\right[$ Negativa em $\left]-\frac{b}{m}, +\infty\right[$	Negativa em $\mathbb{R}$ se $b < 0$ Positiva em $\mathbb{R}$ se $b > 0$	Negativa em $\left]-\infty, -\frac{b}{m}\right[$ Positiva em $\left]-\frac{b}{m}, +\infty\right[$
Extremos	Não tem	Não tem	Não tem
Paridade	Função ímpar, se e só se $b = 0$	Função par. É também uma função ímpar, se e só se $b = 0$	Função ímpar, se e só se $b = 0$
Injetividade	Injetiva	Não injetiva	Injetiva

Função quadrática

Definição

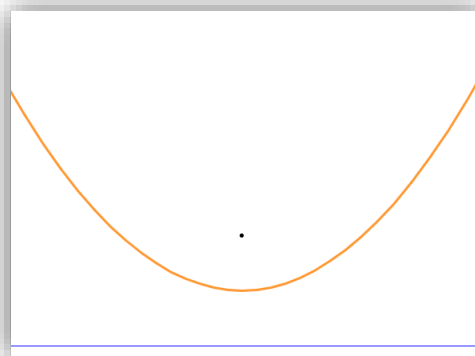
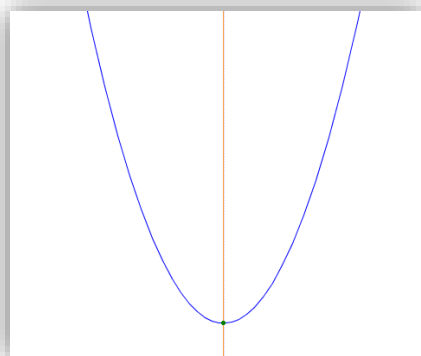
Uma função real de variável real definida por um polinómio do 2º grau, ou seja, definida por uma expressão do tipo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

é designada por **função quadrática**.

O gráfico de uma função quadrática é uma **parábola**.

A primeira abordagem que se faz de parábola é a de uma curva simétrica em relação a um eixo e com um vértice.

Parábola é o conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz) que não contém esse ponto.

Propriedades da função quadrática

Família de funções do tipo $f(x) = ax^2, a \neq 0$

$f(x) = ax^2$	$a < 0$	$a > 0$
Domínio	$\mathbb{R}$	
Contradomínio	${\mathbb{R}^-}_0$	${\mathbb{R}^+}_0$
Zeros	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Concavidade da parábola	Voltada para baixo	Voltada para cima
Eixo de simetria	$x = 0$	
Vértice	$V(0,0)$	
Sinal	Negativa em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$	Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Monotonia	Crescente em ${\mathbb{R}^-}_0$ Decrescente em ${\mathbb{R}^+}_0$	Decrescente em ${\mathbb{R}^-}_0$ Crescente em ${\mathbb{R}^+}_0$
Extremos	Máximo: 0 Maximizante: 0	Mínimo: 0 Minimizante: 0
Paridade	Função par	
Injetividade	Não injetiva	

Família de funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2, a \neq 0$

$f(x) = a(x-h)^2$	$a < 0$	$a > 0$
Domínio	$\mathbb{R}$	
Contradomínio	${\mathbb{R}^-}_0$	${\mathbb{R}^+}_0$
Zeros	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = h$	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = h$
Concavidade da parábola	Voltada para baixo	Voltada para cima
Eixo de simetria	$x = h$	
Vértice	$V(h, 0)$	
Sinal	Negativa em $\mathbb{R} \setminus \{h\}$	Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{h\}$
Monotonia	Crescente em $]-\infty, h]$ Decrescente em $[h, +\infty[$	Decrescente em $]-\infty, h]$ Crescente em $[h, +\infty[$
Extremos	Máximo: 0 Maximizante: h	Mínimo: 0 Minimizante: h
Paridade	Função par, se e só se $h = 0$	
Injetividade	Não injetiva	

Família de funções do tipo $f(x) = ax^2 + k, a \neq 0$

$f(x) = ax^2 + k$	$a < 0$	$a > 0$
Domínio	$\mathbb{R}$	
Contradomínio	$]-\infty, h]$	$[k, +\infty[$
Zeros	Não tem se $k < 0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2$ se $k > 0$	Não tem se $k > 0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2$ se $k < 0$
Concavidade da parábola	Voltada para baixo	Voltada para cima
Eixo de simetria	$x = 0$	
Vértice	$V(0, k)$	
Sinal	Negativa em $\mathbb{R}$ se $k < 0$ Positiva em $]x_1, x_2[$ e negativa em $]-\infty, x_1[\cup] x_2, +\infty[$ se $k > 0$	Positiva em $\mathbb{R}$ se $k > 0$ Positiva em$]-\infty, x_1[\cup] x_2, +\infty[$ e negativa em $] x_1, x_2[$ se $k < 0$
Monotonia	Crescente em ${\mathbb{R}^-}_0$ Decrescente em ${\mathbb{R}^+}_0$	Decrescente em ${\mathbb{R}^-}_0$ Crescente em ${\mathbb{R}^+}_0$
Extremos	Máximo: k Maximizante: 0	Mínimo: k Minimizante: 0
Paridade	Função par	
Injetividade	Não injetiva	

Família de funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + k$, ou $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

$f(x) = a(x-h)^2 + k$ $f(x) = ax^2 + bx + c$	$a < 0$	$a > 0$
Domínio	$\mathbb{R}$	
Contradomínio	$]-\infty, h]$	$[k, +\infty[$
Zeros	Não tem se $k < 0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2$ se $k > 0$	Não tem se $k > 0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2$ se $k < 0$
Concavidade da parábola	Voltada para baixo	Voltada para cima
Eixo de simetria	$x = h$	
Vértice	$V(h,k)$ ou $V(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$	
Sinal	Negativa em $\mathbb{R}$ se $k < 0$ Positiva em $]x_1, x_2[$ e negativa em $]-\infty, x_1[\ \cup\ ]x_2, +\infty[$ se $k > 0$	Positiva em $\mathbb{R}$ se $k > 0$ Positiva em $]-\infty, x_1[\ \cup\ ]x_2, +\infty[$ e negativa em $]x_1, x_2[$ se $k < 0$
Monotonia	Crescente em $]-\infty, h]$ Decrescente em $[h, +\infty[$	Decrescente em $]-\infty, h]$ Crescente em $[h, +\infty[$
Extremos	Máximo: k Maximizante: 0	Mínimo: k Minimizante: 0
Paridade	Função par se e só se $h = 0$	
Injetividade	Não injetiva	

Zeros de uma função quadrática

Uma função quadrática pode ter dois zeros, um zero ou nenhum zero.

$$ax^2 + bx + c, a \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O número de zeros depende do sinal do **binómio discriminante** Δ, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

	$\Delta > 0$ (há duas raízes distintas)	$\Delta = 0$ (há uma raiz dupla)	$\Delta < 0$ (não há raízes)
$a > 0$	+ − + x	+ + x	+ + + x
$a < 0$	− + − x	− − x	− − − x

Vértice do gráfico de uma função quadrática

Qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ pode ser escrita na forma:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$$

sendo $V(h, k)$ o vértice da parábola definida pela função f, onde $h = -\frac{b}{2a}$ e $k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

Inequações do 2º grau

De uma forma geral, para resolver uma inequação do 2º grau deve-se

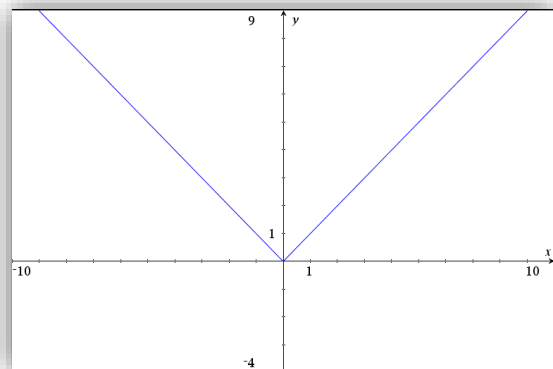
- Escrever a inequação na forma canónica;
- Determinar os zeros da função definida pela expressão do 1º membro;
- Estudar o sinal da função quadrática definida no 1º membro, atendendo aos zeros e ao sentido da concavidade do seu gráfico.

Função módulo

A função f definida por

$$f = |x| = \begin{cases} -x \text{ se } x < 0 \\ x \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

é chamada **função módulo.**

A representação gráfica da função módulo é formada pela união das duas bissetrizes do 1º e do 2º quadrantes.

Resolução de equações e inequações com módulo

- $|x| = k \Leftrightarrow x = k \vee x = -k$, com $k \geq 0$ (se $k < 0$, a condição é impossível).
- $|x| < k \Leftrightarrow x < k \wedge x > -k$, com $k > 0$ (se $k \leq 0$, a condição é impossível).
- $|x| > k \Leftrightarrow x > k \vee x < -k$, com $k \geq 0$ (se $k < 0$, a condição é universal).

Gráfico da função $y = |f(x)|$

O gráfico da função definida por $y = |f(x)|$ é geometricamente igual ao de f nos pontos de ordenada positiva ou nula e simétrico a este, relativamente ao eixo Ox, nos pontos de ordenada negativa.

Gráfico da função $y = f(|x|)$

O gráfico da função definida por $y = f(|x|)$ é geometricamente igual ao de f nos pontos de abcissa positiva ou nula e simétrico a este, relativamente ao eixo Oy, nos pontos de abcissa negativa.

Transformações de funções

Dado o gráfico de uma função f é possível conhecer o gráfico de outras funções, obtidas a partir do gráfico da função f por translações, dilatações/compressões e reflexões.

Translação vertical $[y = f(x) + k]$

O gráfico da função $y = f(x) + k$ obtém-se do gráfico de f por um deslocamento vertical de k unidades:

- Para cima, se $k > 0$;
- Para baixo, se $k < 0$.

Isto é, o gráfico de $y = f(x) + k$ pode ser obtido por uma translação do gráfico de f, associada ao vetor $(0, k)$.

Translação horizontal $[y = f(x - h)]$

O gráfico da função $y = f(x - h)$ obtém-se do gráfico de f por um deslocamento horizontal de h unidades:

- Para a direita, se $h > 0$;
- Para a esquerda, se $h < 0$.

Isto é, o gráfico de $y = f(x - h)$ pode ser obtido por uma translação do gráfico de f, associada ao vetor $(h, 0)$.

Translação oblíqua $[y = f(x - h) + k]$

O gráfico da função $y = f(x - h) + k$ obtém-se do gráfico de f por um deslocamento na horizontal seguido de um deslocamento na vertical.

O gráfico da função pode ser obtido por uma translação do gráfico de f, associada ao vetor (h, k).

Simetria em relação ao eixo das ordenadas $[y = f(-x)]$

O gráfico da função $y = f(-x)$ é simétrico do gráfico de f em relação ao eixo das ordenadas.

Isto é, o gráfico da função $y = f(-x)$ obtém-se do gráfico de f por uma reflexão em relação ao eixo Oy.

Simetria em relação ao eixo das abcissas $[y = -f(x)]$

O gráfico da função $y = -f(x)$ é simétrico do gráfico de f em relação ao eixo das abcissas.

Isto é, o gráfico da função $y = -f(x)$ obtém-se do gráfico de f por uma reflexão em relação ao eixo Ox.

Dilatação/compressão na vertical $[y = af(x)]$

O gráfico da função $y = af(x)$ obtém-se do gráfico de f por uma:

- Dilatação na vertical, segundo o fator a, se $a > 1$;
- Compressão na vertical, segundo o fator a, se $0 < a < 1$.

Dilatação/compressão na horizontal $[y = f(ax)]$

O gráfico da função $y = f(ax)$ obtém-se do gráfico de f por uma:

- Dilatação na horizontal, segundo o fator $\frac{1}{a}$, se $0 < a < 1a > 1$;
- Compressão na horizontal, segundo o fator $\frac{1}{a}$, se $a > 1$.

Funções polinomiais. Polinómios

Um **polinómio na variável x** é toda a expressão do tipo:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

onde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Um polinómio com dois termos diz-se um **binómio**. Se o polinómio tiver apenas um termo, chama-se **monómio**.

O **grau do polinómio** é o grau do seu termo mais elevado.

Um polinómio que apresenta todos os coeficientes iguais a zero diz-se polinómio nulo.

O polinómio nulo tem grau indeterminado.

Adição e subtração de polinómios

Para determinar a soma de polinómios reduzem-se os termos semelhantes.

Para subtrair dois polinómios adiciona-se o ao primeiro o simétrico do segundo.

Multiplicação de polinómios

Para multiplicar dois polinómios aplica-se a propriedades distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica.

Na multiplicação de polinómios, o grau do polinómio produto é igual à soma dos graus dos polinómios fatores

Casos notáveis da multiplicação de binómios

Quadrado de um binómio: $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Diferença de quadrados: $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

Divisão inteira de polinómios

Dividir o polinómio $D(x)$ pelo polinómio $d(x)$ é determinar os polinómios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que:

$$D(x) = d(x) \times Q(x) + R(x)$$

O grau do polinómio resto é sempre inferior ao grau do polinómio divisor.

Se $R(x) = 0$, então $D(x) = d(x) \times Q(x)$ e a **divisão diz-se exata**.

Neste caso, $D(x)$ é divisível por $d(x)$ ou $d(x)$ é divisor de $D(x)$.

Regra de Ruffini

A regra de Ruffini consiste num processo simples para determinar o quociente e o resto da divisão inteira de dois polinómios quando o divisor é da forma $(x - \alpha)$.

Regra de Ruffini – no caso de o polinómio divisor ser do tipo $(ax - b), a \neq 0$

Repara que, como

$$D(x) = (ax - b) \times Q(x) + R(x) \Leftrightarrow D(x) = a\left(x - \frac{b}{a}\right) \times Q(x) + R(x),$$

pode-se aplicar a regra de Ruffini à divisão de $D(x)$ por $(x - \frac{b}{a})$, aplicando seguidamente a divisão deste quociente por a.

O resto da divisão de $D(x)$ por $(ax - b)$ é igual ao resto da divisão de $D(x)$ por $\left(x - \frac{b}{a}\right)$.

Teorema do resto

O resto da divisão inteira de um polinómio $P(x)$ por $(x - \alpha)$ é igual a $P(\alpha)$.

Raiz de um polinómio

Um polinómio $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$ se e só se $P(\alpha) = 0$.

O número real α diz-se zero ou raiz do polinómio $P(x)$.

Fatorização de polinómios

Se o polinómio de grau n

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

admite n raízes reais x_1, x_2, x_3, … , x_n, então admite a seguinte factorização:

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)$$

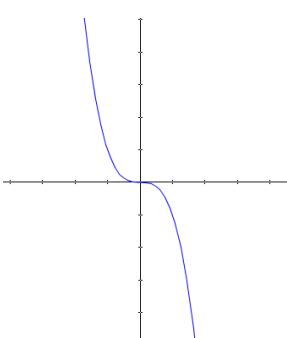
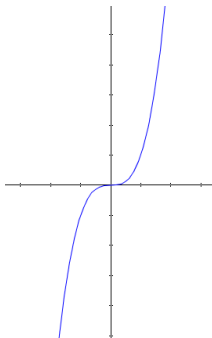
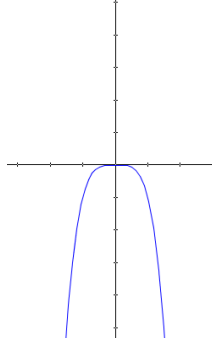
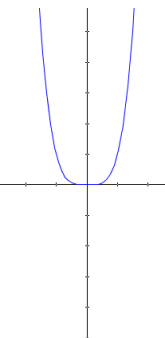
Um polinómio de grau n de coeficientes reais tem, no máximo, n raízes reais.

Raiz de multiplicidade k

Diz-se que α é uma raiz de multiplicidade k do polinómio $P(x)$ se o fator $(x - \alpha)$ aparece exatamente k vezes na fatorização de $P(x)$.

Isto é:

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x) \text{ e } Q(x) \text{ não é divisível por } (x - \alpha).$$

Função polinomial

Função polinomial de grau n é uma função, real de variável real, tal que:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

onde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Comportamento de ramos infinitos

O comportamento da função polinomial f, quando $x \to +\infty$ ou quando $x \to -\infty$, definida por $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ é semelhante ao da função $y = a_0x^n$, $a_0 \neq 0$.

n ímpar		n par	
$y = a_0x^n, a_0 < 0$	$y = a_0x^n, a_0 > 0$	$y = a_0x^n, a_0 < 0$	$y = a_0x^n, a_0 > 0$

Inequações de grau superior a 2

Para resolver inequações de grau superior a 2 deve-se:

- Escrever a inequação na forma canónica;
- Decompor o polinómio do 1º membro num produto de polinómios de grau menor ou igual a 2;
- Elaborar um quadro de sinal;
- Analisar o quadro e determinar o conjunto-solução.